PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA II

TEMA 2.1. PROCESOS DE POISSON.

CONTENIDOS

1. Procesos de Poisson

1.2 Distribución exponencial. Definición y propiedades

La variable aleatoria *X* sigue una distribución exponencial de parámetro ($\lambda>0$), que denotamos como $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Su función de distribución es

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

su esperanza $E(X) = 1/\lambda$ y su varianza $V(X) = 1/\lambda^2$.

La primera propiedad que indicaremos para la distribución exponencial es la pérdida de memoria. Se dice que una variable aleatoria carece de memoria si

$$P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s), \ \forall s,t \geq 0$$

o, equivalentemente,

$$P(X > s+t \mid X > t) = \frac{P(X > s+t, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} = P(X > s)$$
$$\Rightarrow P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t).$$

Por lo tanto, la distribución exponencial carece de memoria, ya que

$$P(X > s+t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s}e^{-\lambda t} = P(X > s)P(X > t)$$

Además, la distribución exponencial no sólo carece de memoria, sino que es la única distribución (continua) con tal propiedad.

Ejemplo. Supongamos que el tiempo que un estudiante dedica diariamente al estudio se distribuye exponencialmente con media 2 horas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante estudie más de 3 horas? y
- ¿cuál es la probabilidad de que estudie más de 3 horas sabiendo que lleva 1 hora estudiando?

Llamemos X al tiempo que el estudiante dedica diariamente al estudio. Entonces, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, con $\lambda=1/2$.

La probabilidad de que estudie más de 3 horas es $P(X > 3) = 1- P(X \leq 3) = 1-(1- e^{-3/2}) = e^{-3/2} = 0.223$ y la probabilidad de que un estudiante estudie más de 3 horas sabiendo que lleva 1 hora estudiando es $P(X > 3 \mid X > 1) = P(X > 2) = e^{-2/2} = 0.368$.

La segunda propiedad es la reproductividad, que hace referencia a que la suma de distribuciones exponenciales independientes e idénticamente distribuidas sigue una distribución gamma.

En efecto, si $X_1,\dots,X_n$ son n variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)\ \forall i$, entonces $X_1+\dots+X_n$ sigue una distribución gamma de parámetros $p = n$ y $a = \lambda$, cuya función de densidad es

$$f(t) = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$E[X_1+\dots+X_n] = p/a = n/\lambda$
$V[X_1+\dots+X_n] = p/a^2 = n/\lambda^2$

La tercera propiedad hace referencia a que el mínimo de n variables aleatorias exponenciales independientes se distribuye exponencialmente.

En efecto, si $X_1,\dots,X_n$ son n variables aleatorias independientes y con distribución exponencial, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)\ \forall i$, entonces $X = \min\{X_1,\dots,X_n\} \sim \text{Exp}(\sum_i \lambda_i)$.

La demostración es trivial como podemos observar de la relación que sigue

$$
\begin{aligned}
P(X > x) &= P(\text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} > x) = P(X_i > x, \forall i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)x}
\end{aligned}
$$

La cuarta propiedad hace referencia a la probabilidad de que una distribución exponencial sea menor que otra. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes y con distribución exponencial de parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente.

Entonces, $P(X_1 < X_2) = \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$, ya que (teorema de la probabilidad total)

$$
\begin{aligned}
P(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty P(X_1 < X_2 \mid X_2 = x)\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx \\
&= \int_0^\infty P(X_1 < x)\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx = \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda_1 x}\right) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx \\
&= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^\infty (\lambda_1 + \lambda_2)\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo. Supongamos que un sistema informático consta de dos procesadores. Los fabricantes garantizan que los procesadores 1 y 2 funcionarán en condiciones óptimas durante un tiempo exponencial de media 5 y 6 años, respectivamente:

- ¿Cuál es la probabilidad de que ambos procesadores funcionen más de 4 años?

- ¿Cuál es la probabilidad de que el procesador 1 deje de funcionar en condiciones óptimas antes que el 2?

Llamemos X_i, i =1,2, al tiempo de funcionamiento en condiciones óptimas del procesador i.

Por tanto, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ con $\lambda_1 = 1/5$ y $\lambda_2 = 1/6$. Entonces, la probabilidad de que ambos procesadores funcionen más de 4 años es

$$P(\min\{X_1, X_2\} > 4) = 1 - P(\min\{X_1, X_2\} \le 4) = e^{-(1/5+1/6)4} \simeq 0.23,$$

y la probabilidad de que el procesador 1 deje de funcionar en condiciones óptimas antes que el 2 es

$$P(X_1 < X_2) = (1/5)/(1/5+1/6) \simeq 0.54.$$

1.2 Procesos de conteo

Supongamos un contador que registra un número de sucesos que han ocurrido, tal como el número de visitas a una página web. Con cada visita el contador se incrementa en una unidad.

Denotemos con $N(t)$ el número marcado por el contador en el instante t. $N(t)$ es una variable aleatoria, ya que las personas no visitan la web a intervalos de tiempo fijados sino en tiempos aleatorios.

A $\{N(t),\ t \geq 0\}$ se le denomina proceso de conteo, siendo un caso especial de proceso estocástico.

Un proceso estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de conteo si $N(t)$ representa el número total de sucesos (de algún fenómeno) que han ocurrido hasta el instante t.

Ejemplo. El número de litros de agua que han llegado a un pantano hasta el instante t (suponiendo que el contador tan sólo contabiliza litros completos) es un proceso de conteo. Si $N(t)$ fuera el número de litros de agua que posee el pantano en el instante t, no sería un proceso de conteo.

Ejemplo. El número de trabajos enviados a una impresora hasta el instante t es un proceso de conteo. Sin embargo, el número de trabajos por imprimir en la impresora en el instante t no sería un proceso de conteo.

Un proceso de conteo debe verificar:

i) $N(t) \geq 0$,
ii) $N(t)$ toma valores enteros,
iii) si $s < t$ entonces $N(s) \leq N(t)$,
iv) si $s < t$, $N(t) - N(s)$ es el nº de sucesos ocurridos en el intervalo (s, t).

Un proceso de conteo se dice de incrementos independientes si el número de sucesos que ocurren en intervalos de tiempos disjuntos es independiente, es decir, el número de sucesos en el intervalo (t_1, t_2), $N(t_2)-N(t_1)$, es independiente del número de sucesos en (t_3, t_4), $N(t_4)-N(t_3)$, $\forall\, t_1, t_2, t_3, t_4$ tal que $(t_1,t_2) \cap (t_3, t_4) = \emptyset$.

Un proceso de conteo se dice de incrementos estacionarios si la distribución del número de sucesos que ocurren en un intervalo de tiempo depende sólo

del tamaño del intervalo, es decir, el número de sucesos que se dan en el intervalo (t_1+s, t_2+s), $N(t_2+s)-N(t_1+s)$, tiene la misma distribución que el número de sucesos en (t_1, t_2), $N(t_2)-N(t_1)$, $\forall\, t_1<t_2$, $s \geq 0$.

Ejemplo. Un ejemplo proceso de conteo con incrementos independientes es el número de trabajos que llegan a una impresora, ya que los trabajos que llegan en un intervalo de tiempo no tienen por qué influir en los que llegan en otro intervalo de tiempo que sea disjunto con él.

Sin embargo, puede que no sea de incrementos estacionarios ya que, por ejemplo, es de esperar que el número de trabajos que lleguen en el intervalo de tiempo de nueve a diez de la mañana no coincida con los que llegan de dos a tres de la tarde, periodo de tiempo que generalmente se dedica a comer.

Por lo tanto, cabe esperar que el número de trabajos enviados a la impresora en el segundo intervalo sea considerablemente menor.

El ejemplo del pantano, sí es un proceso de conteo de incrementos estacionarios, ya que el número de litros que entran en un pantano depende del tamaño del intervalo de tiempo y no de si se considera una hora u otra, siempre suponiendo, claro está, que las condiciones atmosféricas sean parecidas.

1.3 Procesos de Poisson

El proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de tasa , $\lambda > 0$, si

i) $N(0) = 0$,
ii) el proceso es de *incrementos independientes*,
iii) el número de sucesos en un intervalo de tiempo de longitud t sigue una distribución de Poisson de media λt, es decir, $\forall s, t \geq 0$,

$$P\left(N(t+s) - N(s) = n\right) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

El proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$, si

i) $N(0) = 0$,
ii) el proceso es de *incrementos independientes y estacionarios*,
v) $P(N(t+h)-N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$
$P(N(t+h)-N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$,
$P(N(t+h)-N(t) \geq 2) = o(h)$.

Distribución de tiempos de espera y tiempos entre llegadas

Consideremos un proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ de tasa λ. Sea T_n el tiempo entre el suceso n -1 y el n con n = 1,2….

Proposición. T_n, $n = 1,2\ldots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de tasa λ.

Si denotamos como S_n al tiempo de ocurrencia del suceso n-ésimo, entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i,\ n \geq 1$$

es la suma de los primeros n tiempos entre llegadas, por lo que S_n sigue una distribución gamma de parámetros $p = n$ y $a = \lambda$.

Ejemplo. Supongamos que aterrizan aviones en el aeropuerto de Barajas según un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 30$ aviones por hora:

- ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que aterriza el décimo avión?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que transcurre entre el aterrizaje del avión 15 y el avión 16 exceda los 5 minutos?

El aterrizaje de aviones en el aeropuerto es un proceso de Poisson de tasa $\lambda=30$ aviones por hora, es decir, $\lambda=1/2$ aviones por minuto.

El tiempo esperado hasta que aterriza el décimo avión es $E(S_{10}) = n/\lambda = 10/(1/2) = 20$ minutos, y la probabilidad de que el tiempo que transcurre entre el aterrizaje del avión 15 y el avión 16 exceda los 5 minutos es $P(T_{16} > 5) = e^{-5/2} \simeq 0.082$.

Partición de un proceso de Poisson

Sea $\{N(t),\ t \geq 0\}$ un proceso de Poisson con tasa λ. Supongamos que los sucesos se clasifican en dos clases 1 y 2, con probabilidad p y $1-p$, independientemente del resto de sucesos.

Proposición. Sean $N_1(t)$ y $N_2(t)$, respectivamente, el número de sucesos de la clase 1 y 2 hasta el instante t. Claramente, $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ y, además, se verifica que $\{N_1(t),\ t \geq 0\}$ y $\{N_2(t),\ t \geq 0\}$ son procesos de Poisson independientes con tasas λp y $\lambda(1-p)$, respectivamente.

Ejemplo. Se realizan peticiones a un centro de cálculo según un proceso de Poisson de tasa 10 peticiones por segundo. Las peticiones proceden de profesores con probabilidad 0.7 y de alumnos con probabilidad 0.3, de forma independiente. En un intervalo de 10 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que los profesores hayan realizado 4210 peticiones?

Si denotamos $N_P(t)$ como el número de peticiones realizadas por los profesores al centro de cálculo hasta el instante t, sabemos que $\{N_P(t),\ t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson con tasa $10 \times 0.7 = 7$. La probabilidad demandada es

$$P\left(N_P(600) = 4210\right) = e^{-10\times 0.7\times 600}\frac{(10\times 0.7\times 600)^{4210}}{4210!} \simeq 0.006$$

Mezcla de procesos de Poisson

Deseamos estudiar el proceso $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ cuando $\{N_1(t), t \geq 0\}$ y $\{N_2(t), t \geq 0\}$ son procesos de Poisson independientes de tasas λ_1 y λ_2, respectivamente.

Proposición. Sean $\{N_1(t), t \geq 0\}$ y $\{N_2(t), t \geq 0\}$ procesos de Poisson independientes con tasas λ_1 y λ_2, respectivamente. Entonces, $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda_1+\lambda_2$.

Si en lugar de mezclar dos clases mezclamos c clases, los resultados de la proposición anterior se pueden extender de forma directa.

Existe en Teoría de la Probabilidad un resultado útil, que dice que si tenemos c procesos de conteo independientes y los sumamos, entonces el proceso resultante es aproximadamente un proceso de Poisson.
Para ello c debe ser suficientemente grande y las tasas de los procesos individuales deben ser pequeñas en relación a c, pero los procesos individuales pueden ser arbitrarios.

Por otro lado, sea S_n^1 el tiempo de ocurrencia del suceso n-ésimo del tipo 1 y S_m^2 el tiempo de ocurrencia del suceso m-ésimo del tipo 2.

Estamos interesados en calcular la probabilidad de que ocurran n sucesos del tipo 1 antes que m sucesos del tipo 2 y ésta es

$$P\left(S_n^1 < S_m^2\right) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}$$

Distribución condicionada de tiempos de llegadas

Supongamos que se ha producido un suceso de un proceso de Poisson hasta el instante t y queremos saber en qué instante se ha producido ese suceso.

Al ser los procesos de Poisson de incrementos independientes y estacionarios, parece razonable que cada intervalo en $[0,t]$ de igual longitud deba tener la misma probabilidad de contener el suceso. En otras palabras, el tiempo de ocurrencia del suceso debería estar distribuido uniformemente sobre $[0,t]$.

$$\begin{aligned} P\left(T_1 < s \mid N(t)=1\right) &= \frac{P\left(T_1 < s,\, N(t)=1\right)}{P\left(N(t)=1\right)} \\ &= \frac{P\left(1 \text{ suceso en } [0,s),\, 0 \text{ sucesos en } [s,t]\right)}{P\left(N(t)=1\right)} \\ &= \frac{P\left(1 \text{ suceso en } [0,s)\right) P\left(0 \text{ sucesos en } [s,t]\right)}{P\left(N(t)=1\right)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ n variables aleatorias. Decimos que $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}$ son los estadísticos de orden correspondientes a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ si $Y_{(k)}$ es el valor k-ésimo una vez ordenados de mayor a menor $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, $k = 1, \ldots, n$.

Si las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad f, entonces la densidad conjunta de los estadísticos de orden $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}$ es

$$f\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = n! \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i\right), \text{ con } y_1 < y_2 < \cdots < y_n.$$

Si las $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ están distribuidas uniformemente sobre $(0, t)$, entonces de la expresión anterior obtenemos que la función de densidad conjunta para los estadísticos de orden $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}$ es

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < t.$$

Ahora, ya podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición. Supuesto que $N(t)=n$, los n tiempos de ocurrencia de los sucesos $S_1, \ldots, S_n$ tienen la misma distribución que los estadísticos de orden correspondientes a n variables aleatorias uniformemente distribuidas en $(0,t)$.

Ejemplo. Llegan clientes a una ventanilla según un proceso de Poisson. Sabiendo que han llegado cuatro clientes entre las 9:00 y las 10:00, calcular la probabilidad de que el tercer cliente haya llegado entre las 9:20 y las 9:30 y el tiempo esperado de llegada del tercer cliente.

Calculamos la distribución condicional del tiempo de llegada del tercer cliente, S_3, dado que han llegado 4 en una hora. $P(S_3 < x \mid N(1)=4)$ es la probabilidad de que lleguen 3 clientes en el intervalo $(0, x)$ y uno en $(x, 1)$ o los 4 lleguen en $(0, x)$ y ninguno en $(x, 1)$. Así, si $0 \leq x < 1$,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P(S_3 < x \mid N(1) = 4) = \frac{P(S_3 < x\,,\ N(1) = 4)}{P(N(1) = 4)} = \\
&= \frac{P(N(x) = 3)\ P(N(1-x) = 1) + P(N(x) = 4)\ P(N(1-x) = 0)}{P(N(1) = 4)} = \\
&= \frac{1}{(\lambda^4/4!)\, e^{-\lambda}} \left[\frac{(\lambda x)^3}{3!} e^{-\lambda x} \lambda (1-x)\, e^{-\lambda(1-x)} + \frac{(\lambda x)^4}{4!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(1-x)} \right] = \\
&= 4x^3 (1-x) + x^4 = 4x^3 - 3x^4.
\end{aligned}
$$

Si $x \geq 1$, $F(x) = 1$, porque llegan 4 clientes en una hora.

Por lo tanto, la probabilidad de que el tercer cliente haya llegado entre las 9:20 y las 9:30 es $F(1/2) - F(1/3) = 29/144$.

Para obtener la esperanza condicional de S_3, se puede calcular la derivada de F para obtener la función de densidad, obteniendo

$$E\left(S_3 \mid N(1) = 4\right) = \int_0^1 x\left(12x^2 + 12x^3\right)dx = \int_0^1 12x^3 dx + \int_0^1 12x^4 dx = 3/5 \text{ horas.}$$

Así, el tiempo esperado de llegada del tercer cliente, dado que han llegado 4 clientes entre las 9:00 y las 10:00, es 9:36.

Procesos de Poisson no homogéneos

La importancia de los procesos no homogéneos, también denominados no estacionarios, reside en que no se requiere que se verifique la condición de incrementos estacionarios, por lo que contemplamos la posibilidad de que algunos sucesos sean más frecuentes en ciertos periodos de funcionamiento.

El proceso de conteo $\{N(t),\ t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t)$, $t \geq 0$, si

i) $N(0)=0$,

ii) $\{N(t),\ t \geq 0\}$ es de incrementos independientes,

iii) $P(N(t+h)-N(t) = 1) = \lambda(t)h+o(h)$,

iv) $P(N(t+h)-N(t) \geq 2) = o(h)$.

Si denotamos, $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ resulta que

$$P\left(N(t+s) - N(t) = n\right) = e^{-[m(t+s)-m(t)]} \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!},\ n \geq 0$$

Es decir, $N(t+s)-N(t)$ sigue una distribución de Poisson de media $m(t+s)-m(t)$ y a $m(t)$ se le designa como función de valor medio del proceso.

Ejemplo. A una gasolinera que permanece abierta las 24 horas del día llegan clientes de la siguiente forma: desde las 24:00 h a las 7:00 los clientes llegan, en media, con tasa 2 clientes por hora; de 7:00 a 17:00 crece linealmente hasta alcanzar los 20 clientes por hora, permaneciendo esta tasa hasta las 22:00, momento en que empieza a decrecer hasta alcanzar los 2 clientes por hora a las 24:00.

Si suponemos que el número de clientes que llegan a la gasolinera, durante periodos de tiempos disjuntos son independientes, ¿cuál sería un buen modelo probabilístico para esta situación?, ¿cuál es la probabilidad de que llegue un cliente entre la 1:00 y las 3:00? y ¿cuál es el número esperado de llegadas entre las 8:00 y las 10:00?

Un buen modelo probabilístico para esta situación sería un proceso de Poisson no homogéneo, con función de intensidad

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 7 \\ 1.8t - 10.6, & \text{si } 7 \leq t \leq 17 \\ 20, & \text{si } 17 \leq t \leq 22 \\ -9t + 218, & \text{si } 22 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

El número de llegadas entre la 1:00 y las 3:00 sigue una distribución de Poisson con media

$$m(3) - m(1) = \int_1^3 2ds = 4.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que llegue un cliente entre la 1:00 y las 3:00 es

$$P(N(3)-N(1)=1) = e^{-4}(4^1/1!) \simeq 0.073.$$

El número de llegadas entre las 8:00 y las 10:00 sigue una distribución de Poisson con media

$$m(10) - m(8)= \int_8^{10} (1.8s - 10.6)ds \ =11.2 \text{ llegadas.}$$

Por tanto, el número esperado de llegadas entre las 8:00 y las 10:00 es 11.2.

Procesos de Poisson compuestos

Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson compuesto si se puede representar como

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

donde $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson e $\{Y_i, i \geq 1\}$ es una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que son independientes de $\{N(t), t \geq 0\}$.

Para calcular la media de $X(t)$ en primer lugar obtenemos

$$E(X(t) \mid N(t) = n) = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \mid N(t) = n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = nE(Y_1)$$

es decir,

$$E(X(t) \mid N(t)) = N(t)E(Y_1).$$

Luego,

$$E(X(t)) = E(E(X(t) \mid N(t))) = E(N(t)E(Y_1)) = \lambda t E(Y_1).$$

Para la varianza tenemos

$$\begin{aligned} Var(X(t) \mid N(t) = n) &= Var\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \mid N(t) = n\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\ &= nVar(Y_1), \end{aligned}$$

es decir,

$$Var(X(t) \mid N(t)) = N(t)Var(Y_1)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Var(X(t)) &= E(Var(X(t) \mid N(t))) + Var(E(X(t) \mid N(t))) \\ &= E(N(t)Var(Y_1)) + Var(N(t)E(Y_1)) \\ &= \lambda t Var(Y_1) + \lambda t E(Y_1)^2 = \lambda t \left[Var(Y_1) + E(Y_1)^2\right] \\ &= \lambda t E\left(Y_1^2\right). \end{aligned}$$

Ejercicios. Procesos de Poisson

1. Un sistema de multiprocesamiento recibe trabajos según un Proceso de Poisson de tasa 6 trabajos por segundo. Supongamos que el 10% del tráfico se dirige a cierto procesador. Determinar la distribución del tiempo entre llegadas de los trabajos que entran en el procesador y la probabilidad de que haya más de 2 llegadas al procesador en el intervalo de un minuto.

2. Sean X_t e Y_t dos Procesos de Poisson independientes de tasas λ_1y λ_2 llegadas a la hora respectivamente, que describen las llegadas de dos tipos de trabajos en un sistema. Calcular:

   a) Probabilidad de que un trabajo de tipo 1 llegue antes que un trabajo de tipo 2
   b) Probabilidad de que lleguen en una hora 4 trabajos.
   c) Suponiendo que han llegado 4 trabajos. ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 sean de tipo 1?

3. El número de demandas que cierta compañía de seguros debe afrontar sobre sus pólizas sigue un Proceso de Poisson de tasa $\lambda=5$ por semana. Si la cantidad de dinero pagado por cada póliza se distribuye exponencialmente con media 2000 euros, ¿cuál es la media y la varianza de la cantidad de dinero pagado por la compañía en cuatro semanas?